



TITLE:

# Derivative Nonlinear Schrodinger 方程式から得られる方程式と、時 間変化する内部構造を持つ非線形 孤立波(波の非線形現象の数理とそ の応用)

AUTHOR(S):

矢嶋, 徹

---

CITATION:

矢嶋, 徹. Derivative Nonlinear Schrodinger 方程式から得られる方程式と、時間変化する内部構造を持つ非線形孤立波(波の非線形現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1996, 949: 183-192

ISSUE DATE:

1996-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60292>

RIGHT:

## Derivative Nonlinear Schrödinger 方程式から得られる方程式と, 時間変化する内部構造を持つ非線形孤立波

東大工 矢嶋 徹 (Tetsu Yajima)

### 1. はじめに

ソリトン方程式は物理学上のさまざまな分野に現れ, 応用上も重要なものが多い. 微分型非線形シュレディンガー方程式 (以下 DNLS 方程式と略す)

$$iu_t + u_{xx} + i(|u|^2 u)_x = 0 \quad (1)$$

もその中の 1 つであり, 主にプラズマ系や非線形光学などの分野で応用されている方程式である [1]. DNLS 方程式にはこれと等価な方程式

$$iu_t + u_{xx} + i|u|^2 u_x = 0 \quad (2)$$

がある. これら 2 つの方程式は, ゲージ変換によって結びつけられていて, それぞれに対してソリトン解がさまざまな方法で求められている [2,3].

この DNLS 方程式の一般化の 1 つとして, 高次項をもつ DNLS 方程式が存在する. これは, DNLS 方程式のゲージ変換を利用して導出されるものである [4]. 最近この高次項をもつ方程式の数学的な解釈が行なわれた [5] が, 解の具体的な形・振舞いや, Lax 対をはじめとした散乱問題などの考察はあまり行なわれておらず, これらを考えることは意味のあることであろう.

本稿の目的は, この高次項をもつ DNLS 方程式のソリトン解とその性質について調べ, この方程式の拡張として多変数版の高次項つき DNLS 方程式を導入することである. さらに, 新しく導いた方程式の解を求め, その解が時間的に変化する内部構造を持つことを示す. また, より一般的な場合への拡張についても最後に考察してみよう.

### 2. 微分型非線形シュレディンガー方程式のゲージ不変性と局在波の内部構造

この節においてはまず最初に DNLS 方程式のゲージ不変性 [6] について簡単にまとめる. 次にそれを用いて高次項をもつ可積分方程式を導出し, 内部構造をもつソリトン解の存在の可能性について考察する.

最初に, ゲージ不変性について考えよう. ここでは出発点として次の 2 種類の DNLS 方程式を用いる:

$$\left. \begin{aligned} iq_{1t} + q_{1xx} + iq_1 r_1 q_{1x} &= 0, \\ -ir_{1t} + r_{1xx} - iq_1 r_1 r_{1x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

$$\left. \begin{aligned} iq_{2t} + q_{2xx} + i(q_2^2 r_2)_x &= 0, \\ -ir_{2t} + r_{2xx} - i(q_2 r_2^2)_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

これらの方程式をそれぞれ DNLS1, DNLS2 型の方程式と呼ぶことにする. 通常は式

$$r_1 = q_1^*, \quad r_2 = q_2^*$$

によって未知関数どうしが関係づけられているが, ここでは一般的に, このような関係はないものとする.

これらの方程式は, ゲージ変換

$$g_0(x, t) \equiv \exp\left(\frac{i}{4} \int dx q_1 r_1\right), \quad (4a)$$

$$q_2 = q_1/g_0^2, \quad r_2 = r_1 g_0^2. \quad (4b)$$

によって互いに移り合うことが知られている. ここで, DNLS1 方程式の 2 つの未知関数の積  $q_1 r_1$  は, この変換によって DNLS2 方程式に対する同様の量  $q_2 r_2$  に移される. このため逆変換を容易に実行することができることに注意しておきたい.

さて, それぞれの DNLS 方程式の補助線形問題は,

$$\frac{\partial \Psi_j}{\partial x} = L_j \Psi_j, \quad \frac{\partial \Psi_j}{\partial t} = M_j \Psi_j, \quad \Psi_j \equiv \begin{pmatrix} \chi_j^{(1)} \\ \chi_j^{(2)} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

である. ただし, 各々の量の添字はそれぞれ  $j = 1$  が DNLS1 方程式,  $j = 2$  が DNLS2 方程式のものであることをあらわす. ここに現れる行列  $L_1, M_1, L_2, M_2$  は次のようなものである:

$$L_1 = \left(-i\zeta^2 + i\frac{q_1 r_1}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ -r_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} M_1 = & \left(-2i\zeta^4 + i\zeta^2 q_1 r_1 + \frac{q_1 r_{1x} - q_{1x} r_1}{4} - i\frac{q_1^2 r_1^2}{8}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & + \left(2\zeta^3 - \frac{\zeta q_1 r_1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & q_1 \\ -r_1 & 0 \end{pmatrix} + i\zeta \begin{pmatrix} 0 & q_{1x} \\ r_{1x} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6b)$$

$$L_2 = -i\zeta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 0 & q_2 \\ -r_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6c)$$

$$M_2 = (-2i\zeta^4 + i\zeta^2 q_2 r_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (2\zeta^3 - \zeta q_2 r_2) \begin{pmatrix} 0 & q_2 \\ -r_2 & 0 \end{pmatrix} + i\zeta \begin{pmatrix} 0 & q_{2x} \\ -r_{2x} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6d)$$

2つの DNLS 方程式は、ゲージ変換 (4) によって移り合うが、この変換の下でこれらの Lax 対 (6) は、行列

$$G_0 \equiv \begin{pmatrix} g_0 & 0 \\ 0 & 1/g_0 \end{pmatrix}. \quad (7a)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= G_0 \Psi_1, \\ L_2 &= -G_0^{-1} G_{0x} + G_0^{-1} L_1 G_0, \quad M_2 = -G_0^{-1} G_{0t} + G_0^{-1} M_1 G_0, \end{aligned} \quad (7b)$$

のように結びつけられている。

さて、このようにして与えられるゲージ変換を一般化しよう。まず、出発点の方程式として、方程式 (3a) に 3 次の非線形項が加えられた DNLS1 方程式

$$\left. \begin{aligned} iq_{1t} + q_{1xx} + 2\sigma q_1^2 r_1 + i\mu q_1 r_1 q_{1x} &= 0, \\ -ir_{1t} + r_{1xx} + 2\sigma q_1 r_1^2 - i\mu q_1 r_1 r_{1x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

を考えることにする。この方程式の Lax 対は、式 (6a), (6b) で、スペクトルパラメタ  $\zeta$  を  $\zeta^2 \rightarrow (\zeta^2 - \sigma)/\mu$  として得られる。ここでゲージ変換の一般化のために、式 (4a) のかわりに、

$$g = \exp \left( -\frac{ia}{4} \int q_1 r_1 dx \right). \quad (9a)$$

で与えられる因子  $g$  をとり、新しい変数として式 (4b) と同様に

$$q = q_1/g^2, \quad r = r_1/g^2. \quad (9b)$$

と定められる  $q, r$  を導入する。すると、これらの変数が新しい方程式

$$\left. \begin{aligned} iq_t + q_{xx} + 2\sigma q^2 r + i(1-a)\mu q r q_x + ia\mu(q^2 r)_x + \frac{\mu^2 a(a-1)}{4} q^3 r^2 &= 0, \\ -ir_t + r_{xx} + 2\sigma q r^2 - i(1-a)\mu q r r_x + ia\mu(q r^2)_x + \frac{\mu^2 a(a-1)}{4} q^2 r^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9c)$$

に従うことは容易に確かめられる。

次に、この方程式の Lax 対を求める。因子  $g_0$  のかわりに  $g$  を導入したことに伴い、(7a) に準じて次のような行列  $G$  を考える：

$$G \equiv \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1/g \end{pmatrix}. \quad (9d)$$

式 (7b) と同様に, 行列  $L_1, M_1$  を出発点として,  $G$  による変換を行ない,

$$\begin{aligned}\Psi &= G\Psi_1, \\ L &= -G^{-1}G_x + G^{-1}L_1G, \quad M = -G^{-1}G_t + G^{-1}M_1G,\end{aligned}\tag{10}$$

という行列を導入しよう. すると, これらの間の線形問題

$$\Psi_x = L\Psi, \quad \Psi_t = M\Psi,\tag{11}$$

が得られるが, この両立条件は, 方程式 (9c) を与える. このようにして新しく導入した方程式の Lax 対が求められた. この Lax 対の  $\zeta$  依存性を考えると, その散乱問題は DLNS2 方程式 [3] や, 不安定系の NLS 方程式 [7] の場合と全く同様のものであることがわかる [8]. したがって, この方程式の初期値・境界値問題は逆散乱法によって解くことが可能である. また, Lax 対から無限個の保存量の存在は明らかであるので, 方程式 (9c) は可積分である.

この節のおわりに, 新しく得られた方程式のソリトン解を具体的に書いてその特徴を調べよう. この方程式の簡単な場合の  $N$  ソリトン解は, 直接法によって [5] 求められているが, ここでは後での応用を考えて, より一般的な形で書き下してみたい. 未知関数  $q$  と  $r$  をそれぞれ

$$q(x, t) = \frac{g_1(x, t)f_1(x, t)^a}{f_2(x, t)^{a+1}}, \quad r(x, t) = \frac{g_2(x, t)f_2(x, t)^a}{f_1(x, t)^{a+1}},\tag{12}$$

とおき [5], 方程式に代入して整理することにより,

$$\begin{aligned}g_1(x, t) &= \frac{2}{\mu}(p^* - p)e^{-i(K^* + K^{*2}t)}, \\ g_2(x, t) &= \frac{2c_1c_2}{\mu}(p^* - p)e^{i(Kx + K^2t)}, \\ f_1(x, t) &= -c_1 + c_2e^{i[(K - K^*)x + (K^2 - K^{*2})t]}, \\ f_2(x, t) &= -pc_1 + p^*c_2e^{i[(K - K^*)x + (K^2 - K^{*2})t]}.\end{aligned}\tag{13}$$

を得る. この結果を考えに入れると, 解はブライト型パルスである  $g_1(x, t)/f_2(x, t)$  と  $g_2(x, t)/f_1(x, t)$  (これらは DNLS1 方程式のソリトン解でもある) と, ゲージ変換の因子 (9a) に起因する, ダーク型のパルスである  $[f_1(x, t)/f_2(x, t)]^a$  との積で書けている.  $q_1$  と  $r_1$  の間の関係を特に定めない限り, 図 1 に示したように, この因子の絶対値は空間的に変化するため, 方程式の解 (12) の包絡線は空間構造をもつことになる. また, これらのパルスは共に対称で同じ位置に中心をもち, 同じ速度で動く [8]:

$$x_{\text{center}} = -\frac{4}{\mu}(\xi - \sigma)t + \frac{\mu}{4\eta}\ln\frac{|c_2|}{|c_1|}, \quad v_{\text{center}} = \frac{4(\sigma - \xi)}{\mu}.$$

ここで,  $\xi$  はソリトン解の中に現れるパラメタ  $p$  の実部と虚部である. このため, ソリトン解は対称な形であり, 時間的に変化しない包絡線をもつ. また, パルスを中心の速度は, パラメタ  $p$  ばかりでなく, 方程式の係数  $\sigma, \mu$  にも依存するものである. これらのパルスの典型的な形は図 1 に示した.

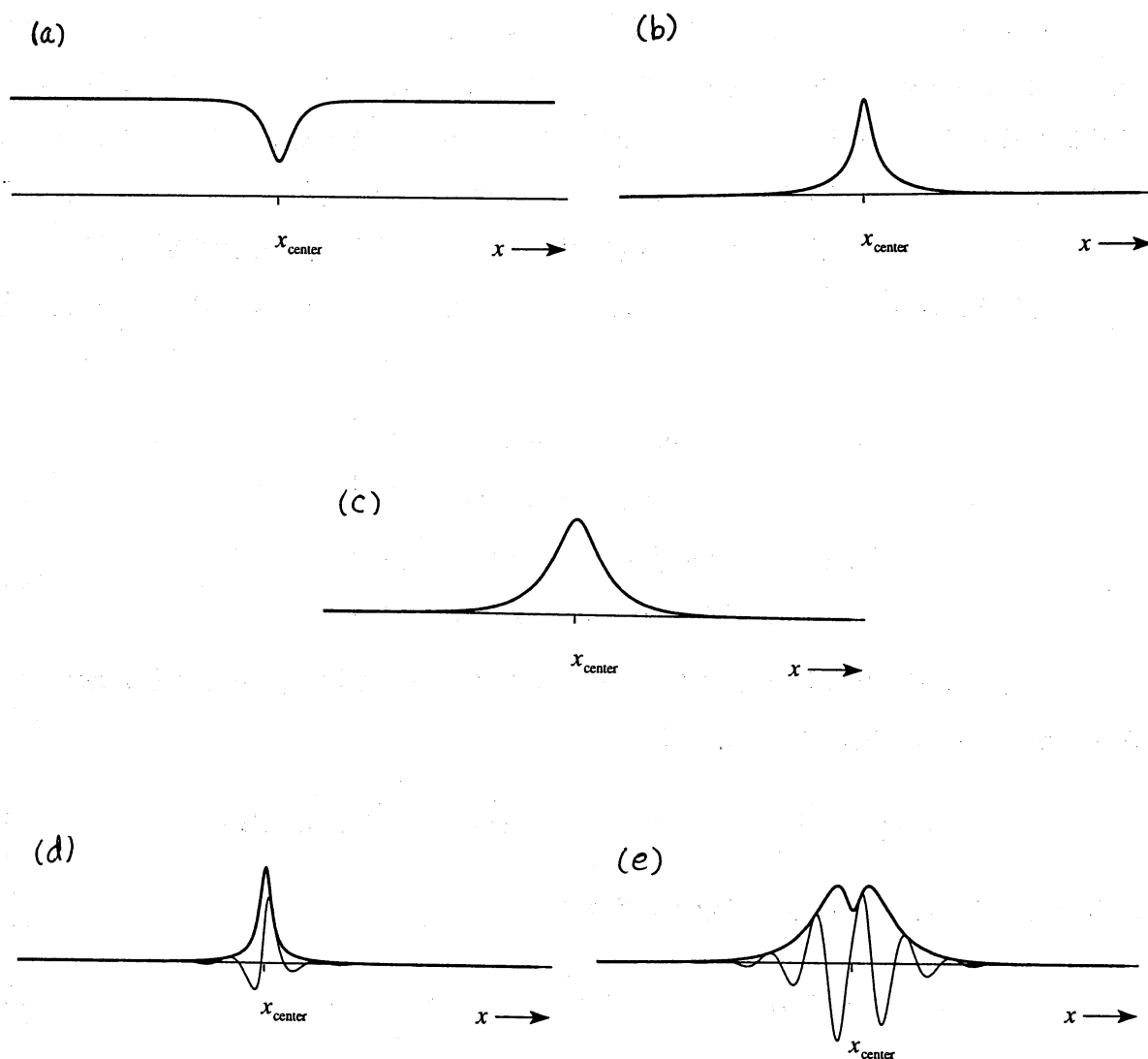


図 1 : 方程式 (9c) の解と, それを構成するパルスの典型的な例. 各図とも太線はパルスの包絡線を示す. (a) ゲージ変換の因子  $(f_1/f_2)^a$ , (b) ブライトパルス  $g_1/f_2$ , (c) ブライトパルス  $g_2/f_1$ , (d) 解としてのパルス  $q$ , (e) 解としてのパルス  $r$ .

### 3. 多変数版 DNLS 型方程式

前節では DNLS1 方程式のゲージ変換を用いて可積分方程式を導出し、その解が内部構造をもつ可能性について論じた。この節では以上の結果をより一般化して、解の内部構造が時間的に変化するような方程式系の導出を考えたい。

既に見たように、前節の方程式の解がもつ内部構造は、式 (9a) で定義されるゲージ変換の因子  $g$  によってもたらされるものである。この因子はダークパルスとして DNLS1 方程式のソリトン解と同じ位置に中心をもち、同じ速度で動くが、これは、 $g(x, t)$  が 1 つの DNLS1 方程式のソリトン解から定義されているためである。このようなソリトン解のもつ内部構造が時間的に変化するようにするためには、ソリトン解を形成するゲージ変換の因子とブライトパルスとが独立に動けばよい。このための 1 つの方法として、別々の方程式の変数を用意し、それから作ったゲージ変換の因子を他方の方程式の未知関数にかけることによって変換を定義することが考えられる。そこで、次のように 2 つの DNLS 方程式を考える：

$$\left. \begin{aligned} iq_{1t} + q_{1xx} + 2\sigma_1 q_1^2 r_1 + i\mu_1 q_1 r_1 q_{1x} &= 0, \\ -ir_{1t} + r_{1xx} + 2\sigma_1 q_1 r_1^2 - i\mu_1 q_1 r_1 r_{1x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

$$\left. \begin{aligned} iq_{2t} + q_{2xx} + 2\sigma_2 q_2^2 r_2 + i\mu_2 q_2 r_2 q_{2x} &= 0, \\ -ir_{2t} + r_{2xx} + 2\sigma_2 q_2 r_2^2 - i\mu_2 q_2 r_2 r_{2x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14b)$$

このように方程式が 2 組に増えたので、それに応じてゲージ変換の因子も 2 個に増やす必要があるが、これらを次のように定める：

$$g_1 = \exp\left(-\frac{ia_1}{4} \int q_2 r_2 dx\right), \quad g_2 = \exp\left(-\frac{ia_2}{4} \int q_1 r_1 dx\right). \quad (15)$$

これらを用いて、式 (12) に倣って新しい変数を

$$u_j = q_j/g_j^2, \quad v_j = r_j g_j^2, \quad j = 1, 2. \quad (16)$$

で定義する。ここで、変数  $q_1, r_1$  に作用する因子  $g_1$  は他方の方程式の解である  $q_2, r_2$  を使って ( $g_2$  は  $q_1, r_1$  を使って) 定義されていて、独立に動かせることに注意しよう。この結果、方程式の組 (14) は、次のような方程式に変換される。

$$\left. \begin{aligned}
& iu_{1t} + u_{1xx} + 2\sigma_1 u_1^2 v_1 + i\mu_1 u_1 v_1 u_{1x} + ia_1(u_2 v_2 u_{1x} + u_1 u_2 v_{2x}) \\
& \quad + \frac{a_1}{2}(a_2 + \mu_1)u_1^2 u_2 v_1 v_2 + \frac{a_1}{4}(\mu_2 - a_1)u_1 u_2^2 v_2^2 = 0, \\
& -iv_{1t} + v_{1xx} + 2\sigma_1 u_1 v_1^2 - i\mu_1 u_1 v_1 v_{1x} - ia_1(u_2 v_2 v_{1x} + u_{2x} v_1 v_2) \\
& \quad + \frac{a_1}{2}(a_2 + \mu_1)u_1 u_2 v_1^2 v_2 + \frac{a_1}{4}(\mu_2 - a_1)u_2^2 v_1 v_2^2 = 0, \\
& iu_{2t} + u_{2xx} + 2\sigma_2 u_2^2 v_2 + i\mu_2 u_2 v_2 u_{2x} + ia_2(u_1 v_1 u_{2x} + u_1 u_2 v_{1x}) \\
& \quad + \frac{a_2}{2}(a_1 + \mu_2)u_1 u_2^2 v_1 v_2 + \frac{a_2}{4}(\mu_1 - a_2)u_1^2 u_2 v_1^2 = 0, \\
& -iv_{2t} + v_{2xx} + 2\sigma_2 u_2 v_2^2 - i\mu_2 u_2 v_2 v_{2x} - ia_2(u_1 v_1 v_{2x} + u_{1x} v_1 v_2) \\
& \quad + \frac{a_2}{2}(a_1 + \mu_2)u_1 u_2 v_1 v_2^2 + \frac{a_2}{4}(\mu_1 - a_2)u_1^2 v_1^2 v_2 = 0.
\end{aligned} \right\} \quad (17)$$

さて、この方程式の Lax 対を求めてみよう。まず、式 (14) の Lax 対はそれぞれ

$$\tilde{L}_j = \left( -i \frac{\zeta^2 - \sigma_j}{\mu_j} + i \frac{q_j r_j}{4} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} 0 & q_j \\ -r_j & 0 \end{pmatrix} \quad (18a)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_j = & \left[ -2i \frac{(\zeta^2 - \sigma_j)^2}{\mu_j^2} + i \frac{(\zeta^2 - \sigma_j) q_j r_j}{\mu_j} + \frac{q_j r_{jx} - q_{jx} r_j}{4} - i \frac{q_j^2 r_j^2}{8} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
& + \left[ \frac{2\zeta(\zeta^2 - \sigma_j)}{\mu_j} - \frac{\zeta q_j r_j}{2} \right] \begin{pmatrix} 0 & q_j \\ -r_j & 0 \end{pmatrix} + i\zeta \begin{pmatrix} 0 & q_{jx} \\ r_{jx} & 0 \end{pmatrix} \quad (18b)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial x} = \tilde{L}_j \tilde{\Psi}, \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}_j}{\partial t} = \tilde{M}_j \tilde{\Psi}. \quad (18c)$$

となる。ただし添字  $j$  は、それぞれ関数  $q_j(x, t)$ ,  $r_j(x, t)$  がみたす方程式の Lax 対であることを示す。式 (14) を 1 組の方程式と思うと、その Lax 対は 4 次の正方行列となり、次のように定義される：

$$\tilde{\Psi}_0 = \tilde{\Psi}_1 \otimes \tilde{\Psi}_2, \quad \tilde{L}_0 = \tilde{L}_1 \oplus \tilde{L}_2, \quad \tilde{M}_0 = \tilde{M}_1 \oplus \tilde{M}_2. \quad (19)$$

方程式 (17) は (14) をゲージ変換したものであるから前節の議論にしたがうと、求める Lax 対は、

$$\Psi = G \tilde{\Psi}_0, \quad L = -G^{-1} G_x + G^{-1} \tilde{L}_0 G, \quad M = -G^{-1} G_t + G^{-1} \tilde{M}_0 G, \quad (20a)$$

$$G \equiv G_1 \oplus G_2, \quad G_j \equiv \begin{pmatrix} g_j & 0 \\ 0 & 1/g_j \end{pmatrix}. \quad (20b)$$

となる。両立条件  $\Psi_{xt} = \Psi_{tx}$  は、確かに方程式 (17) を与える。このようにして新しく求められた方程式 (17) の可積分性が確かめられた。



最後に、1 ソリトン解の形を調べ、それが期待されるように時間的に変化する内部構造をもっていることを確かめてみよう。方程式の未知変数  $u_j, v_j$  は、DNLS 方程式 (14) のソリトン解にゲージ変換の因子 (15) をかけたものになる。このとき、 $u_1, v_1$  の 1 パルス解を例にとって考えると、前節の最後で得た通り、 $\xi$  をパラメタとして、方程式 (14a) のソリトン解の速さは  $4(\sigma_1 - \xi)/\mu_1$  であり、ゲージ変換の因子  $g_1$  の速さは  $4(\sigma_2 - \xi)/\mu_2$  である。 $u_2, v_2$  のパルスについても同様である。一般には方程式の係数  $\sigma_j, \mu_j$  は独立に動かし得るから、これらは異なったものとなり、その結果、これらの積として表される (17) の解は、その包絡線の形が時間とともに変形するものとなっているのである。図 2 にこの方程式の 1 パルス解の典型的な振舞いを示した。

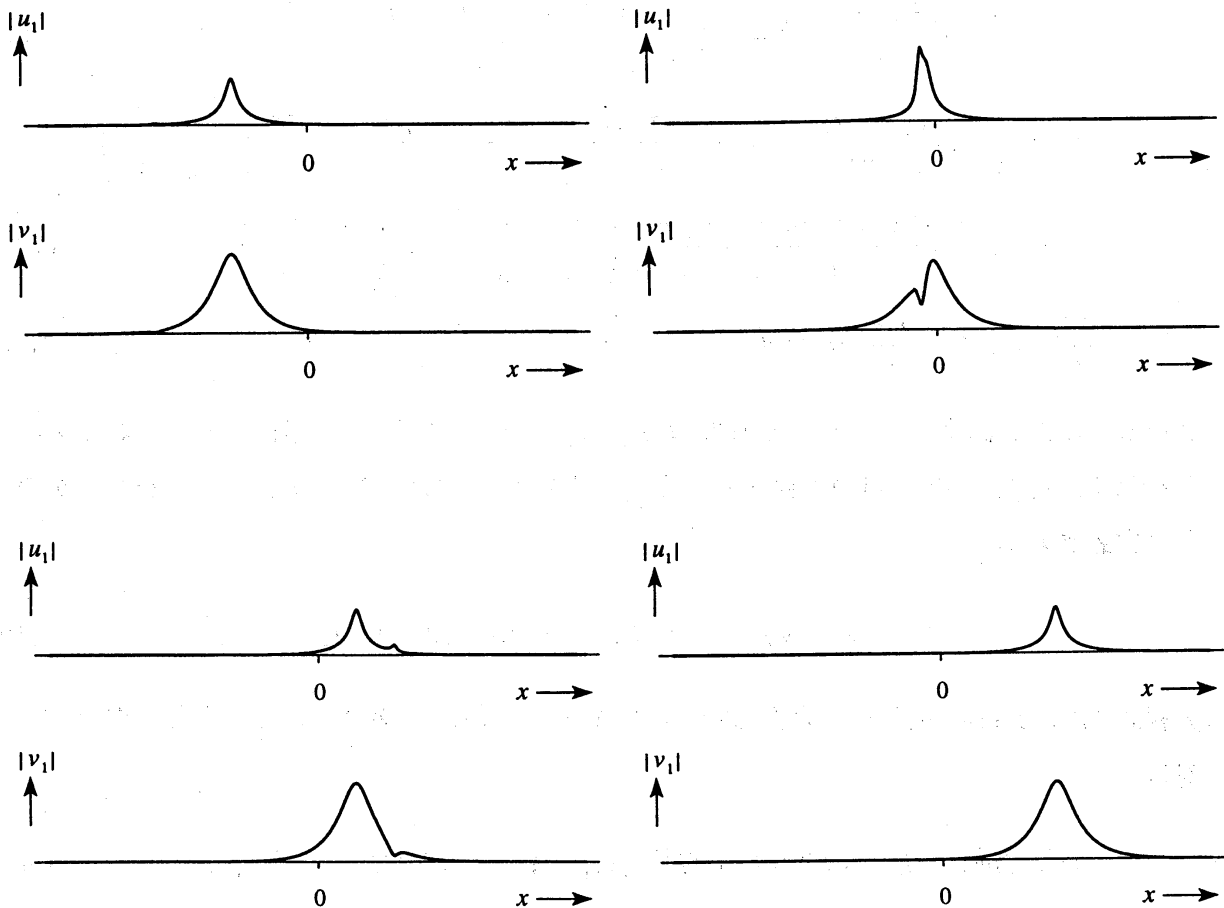


図 2: 方程式 (17) の 1 パルス解の時間変化の典型的な例。解は異なる速度を持つパルスの積で書けるので、動く内部構造をもつ。

#### 4. 結論と今後の展望

本稿では DNLS 方程式のゲージ不変性をもとにして新しい一連の可積分方程式を導出した。一般のゲージ変換 (9) を DNLS1 方程式に作用させて求めた方程式は可積分であることが確かめられたが、この方程式のソリトン解は、DNLS1 方程式のソリトン解とゲージ変換の因子として導入されたダークパルス  $g(x, t)$  の積として構成されていることがわかった。このため、方程式 (9c) のソリトン解は内部構造をもつことになる。また、2 組の DNLS1 方程式を出発点として、新しい可積分方程式 (17) を提出し、そのソリトン解を求めた。この方程式は未知関数が増加して形が複雑ではあるものの、Lax 対の存在により可積分系であることは明らかである。この方程式の解は、§2 で求められた方程式の解と同様内部構造をもつが、その形は時間的に変化するものである。

この方程式の導出をいくつかの方法によって拡張して別の可積分方程式をつくり出すことができる。たとえば、§3 においては 2 つの DNLS1 方程式を出発点として可積分方程式を導出したわけであるが、これを  $N$  本の DNLS1 方程式を出発点としてみよう。ここで  $j$  番目の DNLS1 方程式の未知関数を  $q_j, r_j$  とし、ゲージ変換の因子を

$$g_j = \exp\left(\frac{ia_j}{2} \int dx q_{j+1} r_{j+1}\right), \quad j = 1, \dots, N$$

$$q_{N+1} = q_1, \quad r_{N+1} = r_1$$
(21)

と定めて、新しい変数を式 (16) にならって  $u_j = q_j/g_j, v_j = r_j g_j$  とすれば、 $2N$  個の成分からなる可積分方程式が得られるであろう。また、この方程式の Lax 対は、 $j$  番目の方程式系の Lax 方程式に現れる行列をそれぞれ  $\tilde{L}_j, \tilde{M}_j$  とすると、式 (19), (20) と同様、

$$\left. \begin{aligned} L &= -G^{-1}G_x + G^{-1}\tilde{L}_0G, & M &= -G^{-1}G_t + G^{-1}\tilde{M}_0G, \\ \tilde{L}_0 &= \tilde{L}_1 \oplus \tilde{L}_2 \oplus \dots \oplus \tilde{L}_N, & \tilde{M}_0 &= \tilde{M}_1 \oplus \tilde{M}_2 \oplus \dots \oplus \tilde{M}_N, \\ G &= G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_N, & G_j &= \begin{pmatrix} g_j & 0 \\ 0 & 1/g_j \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\}$$
(22)

で与えられる。このとき、Jost 関数を  $\Psi = G\Psi_1 \otimes \dots \otimes \Psi_N$  とすることで Lax 対を形成することができる。この方程式の解は、元にする方程式やゲージ変換の因子の多様性を考えると、§3 で求められた方程式のそれよりも豊かな構造をもつことが予想される。

その他にも元にする方程式の選択・他の方法によって導入されたゲージ変換の因子を使うことなどさらなる拡張や、実際の物理系での対応する現象の考察・求められた方程式の適用範囲を調べるために応用上重要な摂動安定性の解析などを行なう余地が残されている。

## REFERENCES

- [1] E. Mjølhus: J. Plasma. Phys. **19** (1978) 437; Y. H. Ichikawa, K. Konno, M. Wadati and H. Sanuki: J. Phys. Soc. Jpn. **48** (1980) 279; Y. H. Ichikawa and Y. Abe: Prog. Theor. Phys. Suppl. **94** (1988) 128.
- [2] H. H. Chen, Y. C. Liu and C. S. Liu: Physica Scripta **20** (1979) 490.
- [3] D. J. Kaup and A. C. Newell: J. Math. Phys. **19** (1978) 798.
- [4] A. Kundu: J. Math. Phys. **25** (1984) 3433.
- [5] S. Kakei, N. Sasa and J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 1519.
- [6] K. Sogo and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **52** (1983) 394.
- [7] T. Yajima and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 41; T. Yajima and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3237 [Erratum; **60** (1991) 344].
- [8] T. Yajima: J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1990) 1901.